ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions et notations

Dans tout le problème l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels sera noté E et, pour $n \in \mathbb{N}$, le sous espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n se notera E_n.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose

$$(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

On désigne par Φ l'application de E dans lui même définie par :

$$\Phi(P) = (X^2-1)P'' + 2XP' = \big((X^2-1)P'\big)'.$$

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on désigne par $V_{p,q}$ le polynôme dérivée q-ième de $(X^2-1)^p$:

$$V_{p,q} = [(X^2-1)^p]^{(q)},$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $U_k = V_{k,k}$ et $L_k = \frac{1}{2^k k!}U_k$.

1ère Partie

1. Montrer que Φ est linéaire et induit un endomorphisme Φ_n de E_n.
2. Écrire la matrice de Φ_n dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ de E_n.
3. Déterminer les valeurs propre de Φ_n et en déduire que Φ_n est diagonalisable.
4. On note $\mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_n$ les valeurs propres de Φ_n.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, il existe un unique polynôme unitaire P_k tel que
   $$\Phi_n(P_k) = \mu_k P_k.$$
   (b) Montrer que P_k est de degré k.
5. Montrer que l'application $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur E.
   On notera $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
6. Montrer que, pour tout $(P, Q) \in E^2$,
   $$(\Phi(P)|Q) = (P|\Phi(Q)).$$

7. En déduire que, pour tout couple (k, k') d'entiers naturels tel que $k \neq k'$, on a
$$(P_k|P_{k'}) = 0.$$

8. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E_n, puis en construire une base orthonormée $(R_0, \ldots, R_n)$.
   (b) Calculer
$$|||\Phi_n||| = \sup\{\|\Phi_n(P)\|;\ \ P \in E_n, \|P\| = 1\}.$$

2ère Partie

1. (a) Quel est le degré du polynôme L_k ? Donner son coefficient dominant.
   (b) Soit $k \in \mathbb{N}$; en partant du fait que $(X^2-1)^k = (X-1)^k(X+1)^k$, et moyennant la formule de Leibniz, calculer $L_k(1)$.
   (c) Préciser la parité du polynôme L_k en fonction de celle de k.
   (d) En déduire la valeur de $L_k(-1)$.

2. (a) Montrer que si $p > q$ alors $V_{p,q}(1) = V_{p,q}(-1) = 0$.
   (b) Si $q > 2p$, montrer que $V_{p,q} = 0$.
   (c) En effectuant une succession d'intégrations par partie montrer que
$$\forall\,(p, q) \in \mathbb{N}^2,\ p \neq q \Longrightarrow (U_p|U_q) = 0.$$

3. Déduire de ce qui précède que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_k)$ est une base orthogonale de E_k.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$; montrer que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-2\},\ (XL_n|L_k) = 0$.
   (b) En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, il existe $(\alpha_n, \beta_n \gamma_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que
$$L_{n+1} = (\alpha_n X + \beta_n)L_n + \gamma_n L_{n-1}.$$

5. (a) On pose $W_k = (X^2-1)^k,\ k \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ (X^2-1)W_n' = 2nXW_n.$$
   (b) En dérivant $(n+1)$-fois l'expression précédente, montrer que
$$\Phi_n(L_n) = n(n+1)L_n.$$
   (c) Conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}^*$ tel que $L_n = a_n P_n$, puis calculer a_n.

6. (a) Monter que
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ (X|L_k L_k') = 1 - \frac{1}{2}\|L_k\|^2.$$
   (b) Montrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ (XL_k'|L_k) = k\|L_k\|^2.$$
   On remarquera que si $k \geqslant 1,\ XL_k' - kL_k \in E_{k-1}$.
   (c) En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur de $\|L_k\|$.
   (d) Montrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*,\ (k+1)L_{k+1} = (2k+1)XL_k - kL_{k-1}.$$

3ère Partie

Soit $n \in \mathbb{N}$; soient $x_0, x_1, \dots, x_n$ des éléments deux à deux distincts de l'intervalle $]-1,1[$ et $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels. Une méthode d'intégration numérique consiste à approcher, pour toute fonction $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ par la somme

$$I(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

On note $\mathcal{E}(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

On dit qu'une telle méthode est d'ordre N si elle est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à N, c'est à dire

$$\forall\, P \in E_N,\ \mathcal{E}(P) = 0.$$

On pose enfin $Q_n = \displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$ et pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\mathcal{L}_k = \dfrac{Q_n}{(X - x_k)Q'_n(x_k)}$.

1. On suppose que la méthode est d'ordre $2n+1$.
   (a) Montrer que, pour tout $Q \in E_n$, $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t)Q(t)\,dt = 0$.
   (b) En déduire que $Q_n = \|Q_n\| R_{n+1}$ où R_{n+1} est le $n+2$-ième élément de la suite de polynôme orthogonaux définie dans la première partie. Que peut-on alors dire de $x_0, x_1, \dots, x_n$?
   (c) Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\lambda_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k(t)\,dt$.
   (d) Montrer que, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, $\lambda_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k^2(t)\,dt$.

2. On suppose ici que $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont les zéros de R_{n+1} et on pose

$$\lambda_k = \int_{-1}^{1} \mathcal{L}_k(t)\,dt,\ k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

   On admet que $x_0, x_1, \dots, x_n$ sont bien dans l'intervalle $]-1,1[$, ce qui n'est pas très difficile à établir en partant du polynôme $(X^2-1)^{n+1}$ et en utilisant le théorème de Rolle.
   (a) Montrer que, pour tout $Q \in E_n$, $Q = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} Q(x_i)\mathcal{L}_i$.
   (b) Montrer que la méthode est exacte pour les polynômes de degré $\leqslant n$.
   (c) Soit $P \in E_{2n+1}$; on écrit $P = Q_nQ + R$ avec $deg(R) < deg(Q_n)$.
   - Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_n(t)Q(t)\,dt = 0$.
   - En déduire que $\mathcal{E}(P) = 0$ et conclure.

   (d) Montrer que la méthode est exactement d'ordre $2n+1$.

FIN DE L'ÉPREUVE